Algunos conceptos escolares que no hemos reposado lo suficiente

XVIII Seminario Nacional Estalmat

Rafael Ramírez, Miguel L. Rodríguez

Murcia, 17 de abril de 2026

GOBIERNO DE ESPAÑA MINISTERIO DE CIENCIA, INNOVACIÓN Y UNIVERSIDADES

FECYT INNOVACIÓN

¿Qué queremos hacer?

Reposo curricular	
Conceptos	Procedimientos
Representaciones	Usos

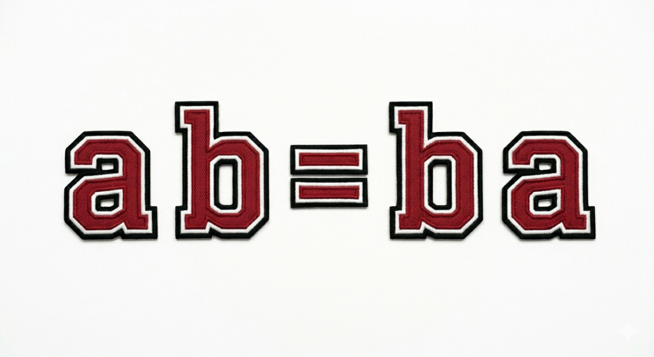
¿Cuántas cifras?

Acerca de la información

Acerca de la información

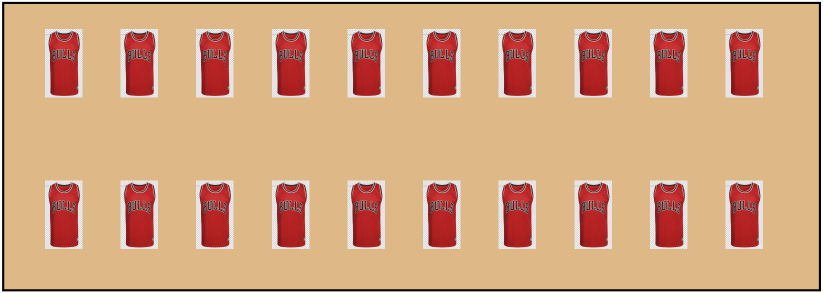
Imagen: James Watson y Francis Crick (Wikipedia)

Propiedad conmutativa

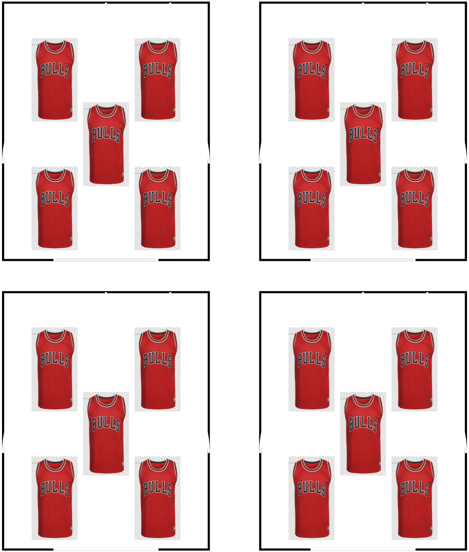


¿Cómo justificamos que $4 \times 5 = 5 \times 4$?

Propiedad conmutativa



Propiedad conmutativa



Propiedad conmutativa. Recuento 1

Propiedad conmutativa. Recuento 2

La calculadora digital

Imagen: El conde Rugen. Con él y con su colectivo esto no funciona.

La calculadora digital

Imagen: El conde Rugen. Con él y con su colectivo esto no funciona.

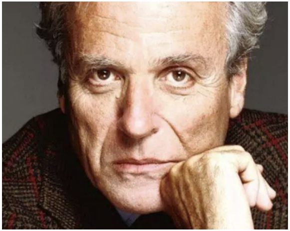


Imagen: Mandy Patinkin y William Goldman, ambos de Chicago

La calculadora digital

Imagen: Manos con paisaje al fondo

La calculadora digital

La cuenta:

$$(5 + d)(5 + i)$$

La calculadora digital

Lo que hacemos digitalmente

- Sumamos $d + i$

La calculadora digital

Lo que hacemos digitalmente

- Sumamos $d + i$
- Esa es la cifra de las decenas, así que

La calculadora digital

Lo que hacemos digitalmente

- Sumamos $d + i$
- Esa es la cifra de las decenas, así que

La calculadora digital

Lo que hacemos digitalmente

- Sumamos $d + i$
- Esa es la cifra de las decenas, así que $10(d + i)$
- Para las unidades hacemos

La calculadora digital

Lo que hacemos digitalmente

- Sumamos $d + i$
- Esa es la cifra de las decenas, así que $10(d + i)$
- Para las unidades hacemos

La calculadora digital

Lo que hacemos digitalmente

- Sumamos $d + i$
- Esa es la cifra de las decenas, así que $10(d + i)$
- Para las unidades hacemos $(5 - d)(5 - i)$

La calculadora digital

Lo que hacemos digitalmente

- Sumamos $d + i$
- Esa es la cifra de las decenas, así que $10(d + i)$
- Para las unidades hacemos $(5 - d)(5 - i)$

El total es

$$10(d + i) + (5 - d)(5 + i)$$

La calculadora digital

Así que tenemos que

La calculadora digital

Así que tenemos que

$$(5+d)(5+i) = 25+5d+5i+di = 10(d+i)+(5-d)(5+i)$$

El último. La raíz cuadrada

Imagen: Edificio Rookery Building en Chicago, de John Wellborn Root

¿Por qué separamos en dos cifras?

Si un número tiene N dígitos, su cuadrado tiene $2N-1$ ó $2N$ dígitos.

Explicación: Ver el primer problema de esta charla.

¿Por qué funciona el algoritmo?

Queremos calcular

$$\sqrt{N}$$

Equivale a encontrar x tal que $x^2 = N$

El famoso algoritmo que no enseñaron de pequeños construye la raíz **cifra a cifra**.

Idea

Usamos la identidad

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

donde

- $a =$ parte ya calculada de la raíz
- $b =$ nueva cifra que queremos añadir

En cada paso añadiremos un nuevo dígito a la raíz.

El algoritmo

$$\sqrt{x\,y\,z\,t} \quad \begin{array}{|l} a \\ \hline (2\cdot a|b)b \\ \hline \dots \end{array}$$

Separamos en grupos de dos: xy y zt

El algoritmo

$\sqrt{x\;y\;z\;t}$	a
	$(2 \cdot a \vert b)b$
	$\dots$

Buscamos el mayor a tal que $a^2 \leq xy$

El algoritmo

$$\begin{array}{c|l} \sqrt{x\,y\,z\,t} & \text{a b} \\ \cline{2-2} & (2\cdot a|b)b \\ \cline{2-2} & \dots \end{array}$$

Buscamos b tal que $2a|b \times b$ se quede cerca del resto

El algoritmo

Cuando ya tenemos una raíz "parcial" a, al añadir un dígito b:

$$(10a + b)^2 = (10a)^2 + 2 \cdot 10a \cdot b + b^2$$

$$(10a + b)^2 - (10a)^2 = 2 \cdot 10a \cdot b + b^2$$

- $(10a)^2$ ya está contabilizado y
- lo añadido es

$$2 \cdot 10a \cdot b + b^2 = (20a + b)b = (2a|b + b)b$$

que es duplicar lo que teníamos, añadir 'b' unidades y multiplicar por 'b' de forma que nos quedemos cerca.

El algoritmo

Así en cada paso:

- Se dobla la raíz ''parcial'': $2a$
- y se busca b tal que:

$$(20a + b)b \leq \text{resto}$$

lo que garantizará que no nos pasaremos del número original.

Separación en pares

Tomemos el número

$$13 \mid 04 \mid 20 \mid 13$$

y lo separamos en pares de cifras de derecha a izquierda. Esto sentido porque trabajaremos con potencias de 100. Pensadlo.

$$(10a)^2 = 100a^2$$

El algoritmo calculará, como hemos contado, un dígito de la raíz en cada paso.

Ejemplo

Calculamos la raíz de 13042013

- Separamos en pares (¿por qué?) 13 | 04 | 20 | 13
- Comenzamos. Buscamos un número que se quede cerca de 13.

$$3^2 = 9 \leq 13$$

  y el resto

$$13 - 9 = 4$$

  lo guardamos.

Continuación

Bajamos el segundo par: 04

$$404$$

Duplicamos el dígito que obtuvimos como primera apx. 3:

$$2 \cdot 3 = 6.$$

Ahora buscamos x tal que

$$(60 + x)x \leq 404.$$

Como

$$66 \cdot 6 = 396$$

ya tenemos una cifra más, el 6 y el resto es

$$404 - 396 = 8$$

Siguiente paso. Tened paciencia

Bajamos 20:

$$820$$

Duplicamos 36:

$$2 \cdot 36 = 72,$$

Ahora

$$(720 + x)x \leq 820$$

lo que nos lleva a

$$721 \cdot 1 = 721$$

con resto

$$820 - 721 = 99$$

Venga que terminamos ...

Bajamos 13:

$$9913$$

Doblamos 361:

$$2 \cdot 361 = 722$$

$$(7220 + x)x \leq 9913$$

$$7221 \cdot 1 = 7221$$

Resto:

$$9913 - 7221 = 2692$$

Así que

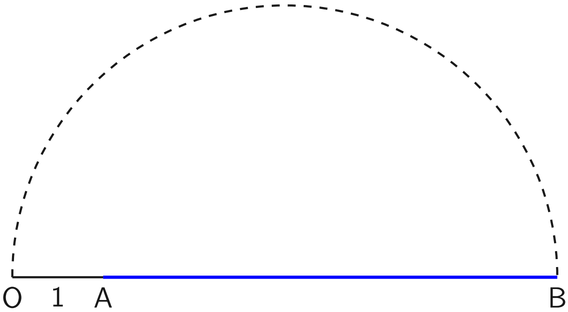
$$\sqrt{13042013} \approx 3611$$

Otra forma con argumento geométrico

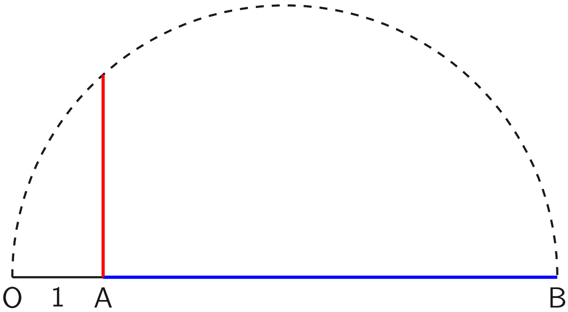
Otra forma con argumento geométrico

Otra forma con argumento geométrico

Otra forma con argumento geométrico



Otra forma con argumento geométrico



Y esta para los amantes de Newton

La raíz cuadrada de $N > 0$ se puede calcular así:

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{N}{x_i}\right), \quad i \geq 0$$

Y esta para los amantes de Newton

La raíz cuadrada de $N > 0$ se puede calcular así:

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{N}{x_i}\right), \quad i \geq 0$$

donde $x_0 > 0$ es un número que queda 'cerca' de $\sqrt{N}$.

Tareas para mañana:

- Decidnos o hallad algún método similar para la raíz cúbica.

Tareas para mañana:

- Decidnos o hallad algún método similar para la raíz cúbica.
- Buscad cuántos guiños hemos hecho a ....

Agradecimientos

Gracias!

a toda la audiencia por vuestra paciencia con nosotros.